5. М и з н е р Ч., Т о р н К., У и л е р Дж. Гравитация. М.: Мир, 1977. Т.2. 525 с.

6. Я н о К., Б о х н е р С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. 152 с.

7. Ш о к е - Б р ю а И. Математические вопросы общей теории относительности // Успехи матем. наук. 1985. Т.40. Вып.6. С.3-39.

Статья написана при поддержке РФФИ, проект № 44-01-01595.

УДК 514.76

ДВОЙСТВЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ОСНАЩЕНИЕМ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

А.В.С т о л я р о в

(Чувашский государственный педагогический институт)

В работе под оснащением гиперповерхности V_{n-1} пространства проективной связности $P_{n,n}$ понимается ее одновременное оснащение в смысле Э.Картана [1] и в смысле А.П.Нордена [2] полями геометрических объектов, соответственно, $\{\nu^i_n, \nu^0_n\}$ и $\{\nu^i_n, \nu^0_i\}$; полученные результаты обогащают теорию двойственных пространств аффинной связности, изучаемую автором в работах [3], [4].

Во всей работе индексы принимают следующие значения: $\overline{J},\overline{K},\overline{L}=\overline{0,n}$; $J,K,L,P,Q=\overline{1,n}$; $\overline{i},\overline{j},\overline{k}=\overline{0,n-1}$; $i,j,k=\overline{1,n-1}$.

Рассмотрим пространство $P_{n,n}$ с n-мерной базой B_n и n-мерными центропроективными слоями P_n, определяемое [5] системой $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\omega^{\overline{K}}_{\overline{J}}$, удовлетворяющих структурным уравнениям

$$D\omega^{\overline{K}}_{\overline{J}} = \omega^{\overline{L}}_{\overline{J}}\wedge\omega^{\overline{K}}_{\overline{L}} + \frac{1}{2}R^{\overline{K}}_{\overline{J}PQ}\,\omega^P_0\wedge\omega^Q_0, \quad \omega^{\overline{L}}_{\overline{L}}=0.$$

В случае обращения в нуль тензора кривизны-кручения $R^{\overline{K}}_{\overline{J}PQ}$ пространство $P_{n,n}$ представляет собой n-мерное проективное пространство P_n.

Дифференциальное уравнение гиперповерхности $V_{n-1}\subset P_{n,n}$ в репере I-го порядка $\{A_{\overline{J}}\}$ имеет вид:

$$\omega^n_0=0, \quad \left(\omega^n_i+\frac{1}{2}R^n_{0ij}\,\omega^j_0\right)\wedge\omega^i_0=0.$$

Последовательно продолжая уравнение $\omega^n_0=0$, имеем:

$$\omega^n_i=\Lambda^n_{ij}\,\omega^j_0,$$

$$d\Lambda^n_{ij}-\Lambda^n_{ik}\,\omega^k_j-\Lambda^n_{kj}\,\omega^k_i+\Lambda^n_{ij}\,(\omega^0_0+\omega^n_n)=\Lambda^n_{ijk}\,\omega^k_0,$$

....

Совокупность функций Λ^n_{ij} образует тензор (вообще говоря, несимметрический) 2-го порядка.

Рассмотрим регулярную гиперповерхность $V_{n-1}\subset P_{n,n}$, т.е. $\Lambda\overset{def}{=}|\Lambda^n_{ij}|\neq 0$; компоненты тензора Λ^{ik}_n, взаимного тензору Λ^n_{ij}, определяются соотношениями

$$\Lambda^n_{ij}\Lambda^{jk}_n=\Lambda^n_{ji}\Lambda^{kj}_n=\delta^k_i.$$

Функция Λ есть относительный инвариант 2-го порядка:

$$d\ln\Lambda+(n+1)(\omega^0_0+\omega^n_n)=\Lambda_k\omega^k_0, \quad \Lambda_k=\Lambda^{ji}_n\Lambda^n_{ijk}.$$

В случае симметрии тензора Λ^n_{ij} совокупность функций

$$\mathcal{D}^n_{ijk}\overset{def}{=}(n+1)\Lambda^n_{ijk}-\Lambda^n_{(ij}\Lambda_{k)}$$

образует тензор 3-го порядка (тензор Дарбу).

Предположим, что регулярная гиперповерхность $V_{n-1}\subset P_{n,n}$ оснащена в смысле Э.Картана [1] полем геометрического объекта $\{\nu^i_n, \nu^0_n\}$:

$$d\nu^i_n+\nu^j_n\,\omega^i_j-\nu^i_n\,\omega^n_n+\omega^i_n=\nu^i_{nj}\,\omega^j_0,$$

$$d\nu^0_n+\nu^0_n\,(\omega^0_0-\omega^n_n)+\nu^j_n\,\omega^0_j+\omega^0_n=\nu^0_{nj}\,\omega^j_0$$

Согласно работе [1] при таком оснащении V_{n-1} индуцируется пространство прективной связности $\overset{1}{P}_{n-1,\,n-1}$, которое определяется [6] системой n^2 форм Пфаффа $\overset{1}{\omega}{}^{\overline{j}}_{\overline{i}}$:

$$\begin{cases}\overset{1}{\omega}{}^i_0=\omega^i_0, & \overset{1}{\omega}{}^j_i=\omega^j_i-\nu^j_n\,\omega^n_i,\\ \overset{1}{\omega}{}^0_0=\omega^0_0, & \overset{1}{\omega}{}^0_i=\omega^0_i-\nu^0_n\,\omega^n_i.\end{cases} \qquad (I)$$

Доказано [4], что в случае $\Lambda^n_{[ij]}=0$ система n^2 форм $\overset{2}{\omega}{}^{\overline{j}}_{\overline{i}}$:

$$\begin{cases}\overset{2}{\omega}{}^i_0=\overset{1}{\omega}{}^i_0, \quad \overset{2}{\omega}{}^0_0=\overset{1}{\omega}{}^0_0, \quad \overset{2}{\omega}{}^i_j=\overset{1}{\omega}{}^i_j+\frac{1}{n+1}\Lambda^{il}_n\,\mathcal{D}^n_{ljk}\,\omega^k_0,\\ \overset{2}{\omega}{}^0_j=\overset{1}{\omega}{}^0_j+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\Lambda^{tl}_n\Lambda_t\,\mathcal{D}^n_{ljk}+\mathcal{D}^n_{sjk}\,\nu^s_n\right)\omega^k_0\end{cases} \qquad (2)$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева [7], а следовательно, определяет пространство проективной связности $\overset{2}{P}_{n-1,\,n-1}$; при этом преобразование J_k форм связности по закону (2) является инволютивным, т.е. $J_k\equiv J_k^{-1}$, а следовательно, пространства $\overset{1}{P}_{n-1,\,n-1}$ и $\overset{2}{P}_{n-1,\,n-1}$ являются двойственными [4] относительно J_k.

Если в пространстве $\overset{1}{P}_{n-1,\,n-1}$ задано поле ковектора $\nu^0_{\overline{i}}$

7 Зак. 1296

$(\nu^0_0 = -1)$, то оно по аналогии с проективным пространством P_n (см.[2]) называется [3] нормализованным; последнее согласно (I), (2) равносильно заданию на гиперповерхности V_{n-1} поля нормали второго рода ν^0_i :

$$d\nu^0_i - \nu^0_j\,\omega^j_i + \nu^0_i\,\omega^0_0 + \omega^0_i = \nu^0_{ij}\,\omega^j_0. \qquad (3)$$

Отметим, что поля квазитензоров ν^i_n, ν^0_i задают оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_{n,n}$ в смысле А.П.Нордена [2], а следовательно, индуцируют двойственные пространства аффинной связности $\overset{1}{A}_{n-1}$ и $\overset{2}{A}_{n-1}$ (вообще говоря, с кручением), определяемые, соответственно, системами форм [4] :$\{\overset{1}{\theta}{}^i_0, \overset{1}{\theta}{}^i_j\}$, $\{\overset{2}{\theta}{}^i_0, \overset{2}{\theta}{}^i_j\}$.

Ниже предполагается, что гиперповерхность $V_{n-1} \subset P_{n,n}$ оснащена полями объектов $\{\nu^i_n, \nu^0_n\}$, $\{\nu^i_n, \nu^0_i\}$; далее под оснащением гиперповерхности будем понимать такое ее "двойное" оснащение.

Рассмотрим оснащенную гиперповерхность $V_{n-1} \subset P_{n,n}$; уравнения (3) в силу (I) запишутся в виде

$$d\nu^0_i - \nu^0_j\,\overset{1}{\omega}{}^j_i + \nu^0_i\,\overset{1}{\omega}{}^0_0 + \overset{1}{\omega}{}^0_i = \overset{1}{\nu}{}^0_{ij}\,\omega^j_0. \qquad (4)$$

Совокупность функций

$$\overset{1}{a}{}^0_{ij} \overset{def}{=} \overset{1}{\nu}{}^0_{ij} - \nu^0_i\,\nu^0_j$$

образует тензор (вообще говоря, несимметрический):

$$d\overset{1}{a}{}^0_{ij} - \overset{1}{a}{}^0_{ik}\,\overset{1}{\omega}{}^k_j - \overset{1}{a}{}^0_{kj}\,\overset{1}{\omega}{}^k_i + 2\,\overset{1}{a}{}^0_{ij}\,\overset{1}{\omega}{}^0_0 = \overset{1}{a}{}^0_{ijk}\,\omega^k_0.$$

Согласно работе [4] справедливо следующее: невырожденное оснащение (в смысле $|\overset{1}{a}{}^0_{ij}| \neq 0$) гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_{n,n}$ кроме $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ индуцирует еще три нормализованные (невырожденным образом) пространства проективной связности $\overset{12}{P}_{n-1,n-1}$, $\overset{13}{P}_{n-1,n-1}$, $\overset{14}{P}_{n-1,n-1}$ с общей базой V_{n-1} ; эти пространства двойственны относительно соответствующих инволютивных преобразований $\mathcal{J}_a$ $(a = 1,2,3)$ форм связности как между собой, так и по отношению к нормализованному пространству $\overset{1}{P}_{n-1,n-1} \equiv \overset{11}{P}_{n-1,n-1}$ (см. схему двойственности, рис.I); преобразования форм связности по законам $\mathcal{J}_a$ имеют, соответственно, следующий вид:

$$\mathcal{J}_1 \begin{cases} \overset{12}{\omega}{}^i_0 = \overset{1}{\omega}{}^i_0, \quad \overset{12}{\omega}{}^0_0 = \overset{1}{\omega}{}^0_0 - \frac{1}{n}\overset{1}{\Lambda}_s\,\omega^s_0, \quad \overset{12}{\omega}{}^i_j = \overset{1}{\omega}{}^i_j + \overset{1}{a}{}^{ik}_0\,\overset{1}{A}{}^0_{kjs}\,\omega^s_0, \\ \overset{12}{\omega}{}^0_i = \overset{1}{\omega}{}^0_i + (\nu^0_i\,\frac{\overset{1}{\Lambda}_s}{n} + \overset{1}{a}{}^{kt}_0\,\nu^0_k\,\overset{1}{A}{}^0_{tis} - 2\,\overset{1}{a}{}^0_{[is]})\,\omega^s_0 ; \end{cases} \qquad (5)$$

$$\mathcal{J}_2 \begin{cases} \overset{13}{\omega}{}^i_0 = \overset{1}{\omega}{}^i_0, \quad \overset{13}{\omega}{}^0_0 = \overset{1}{\omega}{}^0_0, \quad \overset{13}{\omega}{}^i_j = \overset{1}{\omega}{}^i_j + \overset{1}{a}{}^{ik}_0\,\overset{1}{B}{}^0_{kjs}\,\omega^s_0, \\ \overset{13}{\omega}{}^0_i = \overset{1}{\omega}{}^0_i + (\overset{1}{a}{}^{kt}_0\,\nu^0_k\,\overset{1}{B}{}^0_{tis} - 2\,\overset{1}{a}{}^0_{[is]})\,\omega^s_0 ; \end{cases} \qquad (6)$$

$$\mathcal{J}_3 \begin{cases} \overset{14}{\omega}{}^i_0 = \overset{1}{\omega}{}^i_0, \quad \overset{14}{\omega}{}^0_0 = \overset{1}{\omega}{}^0_0 - \frac{1}{n}\overset{1}{\Lambda}_s\,\omega^s_0, \\ \overset{14}{\omega}{}^i_j = \overset{1}{\omega}{}^i_j + \delta^i_j\,\frac{1}{n(n-1)}\overset{1}{\Lambda}_s\,\omega^s_0, \quad \overset{14}{\omega}{}^0_i = \overset{1}{\omega}{}^0_i + \frac{1}{n-1}\,\nu^0_i\,\overset{1}{\Lambda}_s\,\omega^s_0 ; \end{cases} \qquad (7)$$

в этих соотношениях компоненты тензоров $\overset{1}{\Lambda}_k$, $\overset{1}{A}{}^0_{ijk}$, $\overset{1}{B}{}^0_{ijk}$ имеют строения:

$$\overset{1}{\Lambda}_k = \overset{1}{a}{}^{ji}_0\,\overset{1}{a}{}^0_{ijk} - 2n\,\nu^0_k,$$

$$\overset{1}{A}{}^0_{ijk} = \overset{1}{a}{}^0_{ijk} - \nu^0_i\,\overset{1}{a}{}^0_{kj} - \frac{1}{n}\,\overset{1}{a}{}^{tk}_0\,\overset{1}{a}{}^0_{stk}\,\overset{1}{a}{}^0_{ij},$$

$$\overset{1}{B}{}^0_{ijk} = \overset{1}{A}{}^0_{ijk} - \frac{1}{n(n-1)}\,\overset{1}{a}{}^0_{ij}\,\overset{1}{\Lambda}_k.$$

В соответствии с этим при невырожденном оснащении гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_{n,n}$ согласно [4] (см. также [3]) индуцируются четыре двойственные относительно $\mathcal{J}_a$ пространства аффинной связности $\overset{1p}{A}_{n-1}$ (p = I,2,3,4) с кривизной и кручением (см. рис.2), определяемые, соответственно, системами форм $\{\omega^i_0, \overset{1p}{\theta}{}^i_j\}$, где

$$\overset{1p}{\theta}{}^i_j = \overset{1p}{\omega}{}^i_j - \delta^i_j\,(\overset{1p}{\omega}{}^0_0 - \nu^0_k\,\omega^k_0) + \nu^0_j\,\omega^i_0 ;$$

заметим, что $\overset{11}{\omega}{}^i_j \equiv \overset{1}{\omega}{}^i_j$.

Число двойственных пространств аффинной связности, индуцируемых оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_{n,n}$, увеличится, если $\Lambda^n_{[ij]} = 0$. Действительно, при этом пространство $\overset{2}{P}_{n-1,n-1}$, определяемое системой форм $\overset{2}{\omega}{}^j_i$ (см. (2)), также оказывается нормализованным полем ковектора ν^0_i ($\nu^0_0 = -1$), ибо в силу (2), (4) имеем

$$d\nu^0_i - \nu^0_j\,\overset{2}{\omega}{}^j_i + \nu^0_i\,\overset{2}{\omega}{}^0_0 + \overset{2}{\omega}{}^0_i = \overset{2}{\nu}{}^0_{ik}\,\omega^k_0,$$

где

$$\overset{2}{\nu}{}^0_{ik} = \overset{1}{\nu}{}^0_{ik} + \frac{1}{n+1}\left[\Lambda^{st}_n\left(\frac{1}{n+1}\Lambda_s - \nu^0_s\right)\mathcal{D}^n_{tik} + \mathcal{D}^n_{sik}\,\nu^s_n\right].$$

Тензор $\overset{2}{a}{}^0_{ij} \overset{def}{=} \overset{2}{\nu}{}^0_{ik} - \nu^0_i\,\nu^0_k$ при невырожденном оснащении $(|\overset{1}{a}{}^0_{ij}| \neq 0)$ регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_{n,n}$ с полем симметрического тензора Λ^n_{ij} , вообще говоря, также является невырожденным. Следовательно, согласно [4] индуцируются еще четыре двойственные пространства аффинной связности $\overset{2p}{A}_{n-1}$ (см. рис.3), определяемые, соответственно, системами форм $\{\omega^i_0, \overset{2p}{\theta}{}^i_j\}$, где

$$\overset{2p}{\theta}{}^i_j = \overset{2p}{\omega}{}^i_j - \delta^i_j\,(\overset{2p}{\omega}{}^0_0 - \nu^0_k\,\omega^k_0) + \nu^0_j\,\omega^i_0 ;$$

здесь $\overset{21}{\omega}{}^i_j = \overset{2}{\omega}{}^i_j$ и остальные формы $\overset{2p}{\omega}{}^i_j$ имеют строения вида (5) - (7) с соответствующей заменой в них индекса "I" на индекс "2".

Справедливы следующие предложения:

I. Аффинные связности пространств $\overset{2}{A}_{n-1}$ и $\overset{21}{A}_{n-1}$, индуцируемых оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_{n,n}$ с полем симметрического тензора Λ^n_{ij}, совпадают тогда и только тогда, когда рассматриваемая нормализация взаимна относительно пучка инвариантных соприкасающихся гиперквадрик [6] :

$$\Lambda^n_{ij} x^i x^j + \frac{2}{n+1} \Lambda_i x^i x^n + \left(\frac{1}{n^2-1} \hat{\ell} + \sigma b_0 \right) (x^n)^2 = 2 x^0 x^n ,$$

где $\{ \hat{\ell}, \Lambda^n_{ij}, \Lambda_i \}$ – геометрический объект 4-го порядка, σ – инвариантный параметр, b_0 – относительный инвариант 3-го порядка.

2. Пространство аффинной связности $\overset{12}{A}_{n-1}$, индуцируемое невырожденным оснащением регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_n$ имеет нулевое кручение $\overset{12}{\tau}{}^i_{st}$ тогда и только тогда, когда гиперповерхность $\tilde{V}_{n-1}$, описываемая оснащающей точкой $N_n = \nu^0_n A_0 + \nu^i_n A_i + A_n$, является огибающей семейства гиперплоскостей $[N_n N_i]$, где $N_i = A_i + \nu^0_i A_0$; при этом аффинная связность пространства $\overset{12}{A}_{n-1}$ является связностью первого рода на гиперповерхности $\tilde{V}_{n-1} \subset P_n$, нормализованной полями объектов $\{\nu^i_n\}$, $\{\nu^0_i\}$.

В заключение отметим следующее. Одновременное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset P_{n,n}$ в смысле Э.Картана и А.П.Нордена задает ее оснащение и в смысле Э.Бортолотти [8]. Это оснащение согласно [4] в случае $\Lambda^n_{[ij]} = 0$ индуцирует два двойственных нормализованных пространства проективной связности $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ и $\overset{2}{P}_{n-1,n-1}$; следовательно, в схеме рис. 3 число двойственных пространств аффинной связности в общем случае возрастет до шестнадцати.

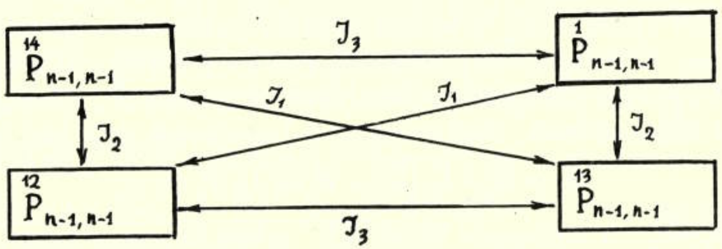

Рис.I

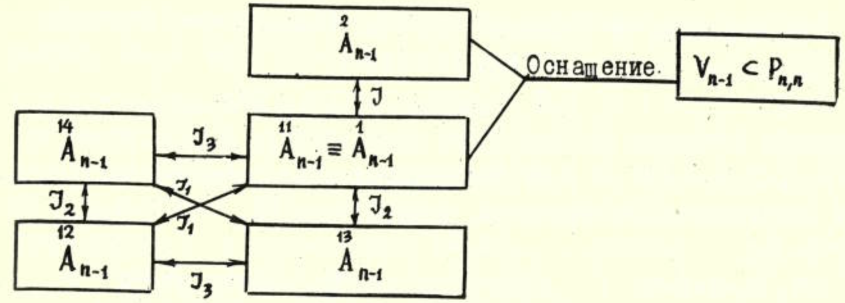

Рис.2

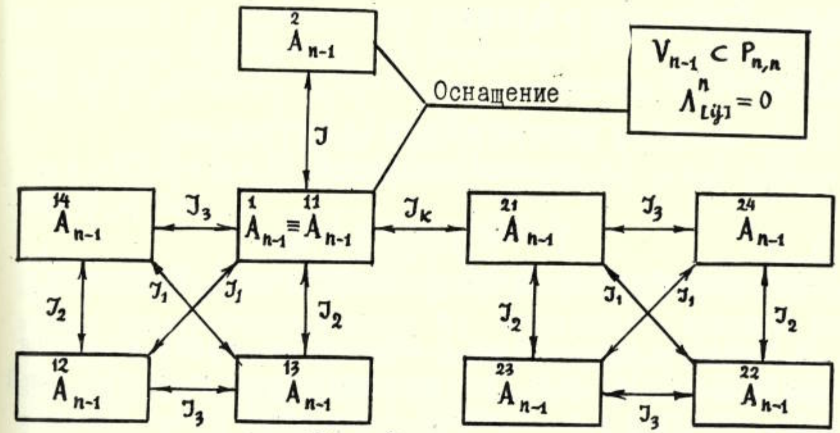

Рис. 3

Библиографический список

I. Cartan E. Les espaces à connexion projective // Труды семинара по вектор. и тензорн. анализу. М., 1937. Вып.4. С.147-159.

2. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.

3. С т о л я р о в А.В. Внутренняя геометрия нормализованного пространства проективной связности / Ин-т научн. информ. АН СССР, 1976. 38 с. Деп. в ВИНИТИ, № 356-76.

4. С т о л я р о в А.В. Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1977. Т.8. С.25--46.

5. Cartan E. Leçons sur la théorie des éspaces á connexion projective. Paris, 1937.

6. Л а п т е в Г.Ф. Гиперповерхность в пространстве проективной связности // ДАН СССР. 1958. Т.121. № 1. С.41–44.

7. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т.2. С.275–382.

8. Bortolotti E. Connessioni nelle varietá luogo di spazi; applicazione alla geometria metrica differenziale delle congruenze di rette // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. 1933. V.3. P. 81–89.

УДК.514.754.7

УРАВНЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ НА МНОГООБРАЗИИ С АФФИННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

И.И.Ц ы г а н о к

(Владимирский государственный педагогический университет)

В статье на многообразии с аффинной связностью выводятся уравнения векторного поля, его фундаментальных тензорных полей первого, второго и т.д. порядков; описываются поля с обращающимися в нуль фундаментальными тензорными полями k-го порядка.

1. Пусть M – n-мерное многообразие с аффинной связностью ∇ без кручения, заданной в расслоении $L(M)$ линейных реперов $\mathcal{R}_x=\{e_i\}$ $(i,j,k,\ell=\overline{1,n})$ над M. Обозначим через $\omega=\{\omega^i_j\}$ форму связности ∇, а через $\theta=\{\theta^i\}$ – каноническую форму на M. Формы θ и ω удовлетворяют структурным уравнениям аффинной связности[1]:

$$d\theta^i=\theta^j\wedge\omega^i_j,\quad d\omega^i_j=\omega^k_j\wedge\omega^i_k+R^i_{jk\ell}\,\theta^k\wedge\theta^\ell, \tag{I.1}$$

где $R^i_{jk\ell}$ – компоненты тензора кривизны связности ∇. При фиксации точки x многообразия M формы $\theta^i=0$, а формы ω^i_j становятся формами π^i_j полной линейной группы $GL(n,\mathbb{R})$ и подчиняются структурным уравнениям $\delta\pi^i_j=\pi^k_j\wedge\pi^i_k$, где δ – символ дифференцирования по параметрам группы $GL(n,\mathbb{R})$.

Рассмотрим векторное поле $\xi=\{\xi^i\}$ на многообразии M с аффинной связностью ∇. Для него определен ковариантный дифференциал $\nabla\xi$ следующим равенством:

$$(\nabla\xi)_x=\{d\xi^i+\xi^k\omega^i_k\}_x e_i \tag{I.2}$$

для любой точки x. При этом $\nabla\xi$ является линейной дифференциальной формой со значениями в $T(M)$. Ее значение $(\nabla\xi)_x(X)$ на векторе $X\in T_x(M)$ называется ковариантной производной по направлению X и обозначается $(\nabla_X\xi)_x$, поэтому

$$(\nabla_X\xi)_x=\{d\xi^i+\xi^k\omega^i_k\}_x(X)e_i. \tag{I.3}$$

Отображение

$$(\nabla\xi)_x:\ T_x(M)\to T_x(M) \tag{I.4}$$

по закону (I.3) сопоставляет вектору X вектор $(\nabla_X\xi)_x$. Непосредственно проверяется, что отображение (I.4) является линейным преобразованием касательного пространства $T_x(M)$. Значит,

$$(\nabla_X\xi)_x=A_xX, \tag{I.5}$$

где $A_x=\{\xi^i_j(x)\}\in GL(n,\mathbb{R})$. Тогда уравнениям (I.2) можно придать следующий вид:

$$d\xi^i+\xi^k\omega^i_k=\xi^i_j\theta^j. \tag{I.6}$$

При фиксации точки x многообразия M из (I.6) последуют уравнения инвариатности вектора ξ_x относительно действий группы $GL(n,\mathbb{R})$: $\delta\xi^i+\xi^k\pi^i_k=0$. Поэтому уравнения (I.5), как и равносильные им уравнения (I.6), являются уравнениями векторного поля ξ на многообразии M с аффинной связностью ∇.

С учетом уравнений структуры (I.1) продолжение уравнений (I.6) имеет вид:

$$d\xi^i_j-\xi^i_k\,\omega^k_j+\xi^k_j\,\omega^i_k=\xi^i_{jk}\,\theta^k, \tag{I.7}$$

где

$$\xi^i_{jk}-\xi^i_{kj}=\xi^\ell R^i_{\ell kj}. \tag{I.8}$$

Равенства (I.7) являются уравнениями тензорного поля A на многообразии M. Соотношения (I.8) носят название тождеств Риччи и служат условиями интегрируемости уравнений векторого поля ξ [2, с.127], [3, с.43].

После p-го продолжения уравнений (I.6) получим:

$$d\xi^i_{j_1\dots j_p}-\sum_{s=1}^{p}\xi^i_{j_1\dots j_{s-1}kj_{s+1}\dots j_p}\,\omega^k_{j_s}+\xi^k_{j_1\dots j_p}\,\omega^i_k=\xi^i_{j_1\dots j_pj_{p+1}}\,\theta^{j_{p+1}}, \tag{I.9}$$

где